Vollständige Induktion und die natürlichen Zahlen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe

Hans-Christian Reichel, Wien

§ 1. EINLEITUNG (historische und didaktische Bemerkungen). Eine in der Mathematik und in den Naturwissenschaften vorherrschende Denkmethode ist die Deduktion: Die Ableitung des Speziellen aus dem Allgemeinen (deducere, lat.: herabführen, ableiten). Z.B.: "Jede ganze Zahl k, deren alternierende Ziffernsumme 0 oder durch 11 teilbar ist, ist selbst durch 11 teilbar; $k = 34304$ (alternierende Ziffernsumme = 11) ist daher durch 11 teilbar". Seit jeher denken wir aber auch "induktiv", d.h. wir versuchen vielfach, vom Einzelnen, Besonderen auf etwas Allgemeines, Gesetzmäßiges zu schließen; (inducere, lat.: (redend) einführen). In gewissem Sinn ist es ja geradezu typisch für das wissenschaftliche Denken, aus der Empirie, aus einzelnen Versuchen auf allgemeine Sätze oder Prinzipien zu schließen, die dann allerdings noch anderweitiger "Erhärtungen" ("Beweise") bedürfen. Induktive Schlüsse sind naturgemäß mit Unsicherheit behaftet: der aus der Beobachtung gezogene Schluß, alle Metalle seien schwerer als Wasser, erwies sich etwa durch die Entdeckung des Kalium (spez. Gewicht: 0,86) als falsch. - Induktive Methoden sind aber auch aus der modernen Naturwissenschaft nicht wegzudenken, man denke z.B. an die Evolutionstheorie. In der Mathematik dienen induktive Schlüsse als heuristisches Prinzip (εὑρίσκω, gr.: finden), also zum Finden, Entdecken, bzw.: Vermuten allgemeiner Sätze. Z.B.: $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, ..., es scheint also die Formel $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$ für alle natürlichen Zahlen n zu gelten. Tatsächlich "bewahrheitet" sich die so entdeckte Formel auch für $n=5,6,7,8,\ldots$, und man ist solcherart leicht geneigt, dies allgemein für richtig zu halten. (Die Richtigkeit der Formel folgt etwa aus der Summenformel für arithmetische Reihen oder durch vollständige Induktion.)

Obwohl es heut klar erscheint, daß eine derartige Vorgangsweise prinzipiell zu keinem "Beweis" der Formel führen kann - und dies zu erkennen, stellt auch ein unbestrittenes und ernst zu nehmendes Lehrziel des Mathematikunterrichts dar -, waren derartige "Induktionsbeweise" bis "herauf" ins 18. Jahrhundert immer wieder und durchaus üblich. *) Neben vielen anderen bedienten sich ihrer z.B. J. Wallis (1616 - 1703), und sogar J. Bernoulli (1654 - 1705), der bereits die "vollständige Induktion" kannte, ja dem oft die "Entdeckung" oder besser: die erste allgemein gültige Formulierung dieses Beweisprinzips zugeschrieben wird (siehe aber unten). Wallis verteidigt gegen Fermat, der ihn deshalb getadelt hatte, die Schlußweise "per inductionem" und behauptet, daß auch Fermat sie selbst anwende. Dazu schreibt z.B. Freudenthal [FR]: " Formell hat er recht, aber er verschweigt, daß es sich bei Fermat um quasiallgemeine Beweise (siehe unten) handelt, während er selber Sätze, die er quasiallgemein für alle natürlichen Zahlen bewiesen hatte, ruhig für alle reellen Zahlen ausspricht". (Es soll aber nicht verschwiegen werden, daß sich vielfach derartig entstandene Sätze später mit Hilfe anderer, zulässiger Beweise als richtig herausgestellt haben.)

Korrekt durchgeführte vollständige Induktionsbeweise setzen sich also seit dem 18. Jahrhundert langsam durch. Andererseits treten vollständige Induktionsbeweise, wenn auch nur in rudimentärer, oft nur andeutungsweiser oder quasiallgemeiner z.T. auch falscher, jedenfalls aber unreflektierter Form auch schon viel früher auf, z.B. bei Euklid (450 v. Ch.), F. Maurolico (1494 - 1575) - nach neueren Forschungen läßt sich die Behauptung, er sei der Erfinder der vollständigen Induktion, nicht aufrecht erhalten ([FR]) -, bei Castilioni (15.Jhdt.; binomischer Lehrsatz!) oder bei Lewi ben Gerson (1288 - 1344), der die Anzahl der Permutationen von n Elementen mittels Induktion bestimmt haben soll.

Der erste, der die Methode des Schlusses von n auf n+1, d.h. - wie wir seit R. Dedekind (1831 - 1916) sagen - den "vollständigen" Induktionsschluß als allgemeines Beweisprinzip, als metamathematische Aussage sozusagen, erkennt und formuliert, ist B. Pascal (1623 - 1662).

---

*) Im Briefwechsel Legendre-Jacobi (publ. in "Jacobi, Werke I" (1881); z.B. p. 400) wird das Wort "Induktionsbeweis" in diesem Sinn bereits als Schimpfwort verwendet!

C.F. Gauß (1777 - 1855), der den Fundamentalsatz der Algebra u.a. durch vollständige Induktion bewies, spricht bereits von einer "allgemein bekannten Methode" und im 19. Jahrhundert wird sie zu einer Selbstverständlichkeit für alle Mathematiker. Es mag interessant sein, sich in diesem Zusammenhang den "geistigen Bogen" vor Augen zu halten, der sich z.B. von Simplikios' *) Formulierung (siehe [VDW_1]) bis zu Pascal spannt. Das Denkprinzip "vollständige Induktion" - gewissermaßen also eine Art "archetypische" Denkweise der Mathematik - hat wie alle Denkprinzipien eine kulturhistorische Entwicklung durchgemacht, die es nicht zuletzt gilt, den Schülern zu erläutern (siehe auch unter dem Stichwort "quasiallgemeiner Schluß von n auf n+1"). Ganz allgemein verlangt zwar die Mathematik seit den Griechen nach Beweisen, doch was als "Beweis" gelten darf, unterlag und unterliegt nicht zuletzt auch einer historischen Entwicklung. Der heutige "Exaktheitsanspruch" stammt - grob gesagt - erst aus dem 19. Jahrhundert und verändert sich auch derzeit noch. Man denke z.B. an die Entwicklung der axiomatischen Mengenlehre oder an - gerade heute wieder vorangetriebene - "konstruktive" Auffassungen der Mathematik (in Frage-Stellung des "Tertium non datur", des Auswahlaxioms, u.v.a.).

Im Mathematikunterricht sind historische Bemerkungen im Sinne von Entwicklungsgeschichte einer Idee, eines Begriffes oder einer Methode dem "Aufzählen" bedeutender Mathematiker mit Angabe von Geburts- und Sterbejahr unbedingt vorzuziehen, sie entfalten weit über den Mathematikunterricht hinaus ihre Wirkung. Für Schüler ist es sicher nicht selbstverständlich, daß auch einfache und unmittelbar klar erscheinende Denkprinzipien wie etwa die vollständige Induktion ihre geschichtliche Entwicklung besitzen. So liegen denn beim Thema "vollständige Induktion" die Lehrziele sicher nicht primär beim "Nachbetenkönnen" der jeweiligen Schlüsse von n auf n+1, oder positiv formuliert: nicht so sehr bei der Beweismethode selbst - als vielmehr bei

(1) der Erkenntnis, daß "unvollständige Induktion", d.h. "Verifizierung" einer Behauptung durch einige Spezialfälle, niemals Beweis im heutigen Selbstverständnis der Mathematik sein kann;

*) Der große Aristoteles-Kommentator, ging aus Anlaß der Schließung der platonischen Akademie, der letzten "Burg" hellenischen Heidentums, durch Kaiser Justinian 529 n.Ch. nach Persien.

(2) daß aber derartige unzulässige "Induktionsschlüsse" oft durch das Prinzip der vollständigen Induktion "kultiviert" werden können (exemplarisch lehren!), und für die Mathematik in dieser Form dann von großer Bedeutung sind, daß weiters

(3) diese Beweismethode durch vollständige Induktion, also das Exaktifizieren einer fast angeborenen Art des induktiven Schließens eine lange kulturhistorische Geschichte und Entwicklung hat; und daß schließlich

(4) dem "unvollständig" induktiven Schließen ("es stimmt für $n=1,2,3,4,5$, also wird es für alle natürlichen Zahlen stimmen") ein heuristischer Wert zukommt. Dieses "Probieren" führt oft zu Vermutungen, die aber dann - und das sollte deutlich erkannt werden - eines "strengen" und "vollständigen" Beweises bedürfen (Beweisbedürfnis wecken!).

Im Hinblick auf die späteren Bemerkungen zum Thema "quasiallgemeiner Induktionsschluß" sei hier noch ein weiteres Lehrziel vorweggenommen:

(5) Unterscheiden können zwischen unzulässigen "Induktionen" (also bloßem Verifizieren einer Behauptung für einige Spezialfälle und quasi-allgemeine, d.h. für spezielle Zahlen durchgeführten aber das allgemeine Prinzip anzeigenden Induktionsschlüssen.

Ein - sicher auch für den Unterricht - nettes Beispiel ad (1) bzw. (4) liefert etwa das Polynom $f(n)=n^2-n+41$, welches für $n=1,2,3,4\ldots 40$ nur Primzahlen $f(n)$ liefert [einige ausrechnen lassen!], aber für $n=41$ erstmals keine Primzahl liefert: $f(41)=41^2$. Besser noch: $f(n)=n^2-79n+1601$ liefert Primzahlen für alle $n=1,2,\ldots,79$, erst $f(80)=1521$ ist eine durch 3 teilbare Zahl!

Wir wollen uns nun mit unserem Thema vom mathematischen Standpunkt auseinandersetzen (und jeweils unterrichtspraktische Bemerkungen einfügen):

Ein Beweis durch vollständige Induktion bietet sich an, wenn es gilt, Behauptungen zu beweisen, welche eine natürliche Zahl n als Variable enthalten, und deren Richtigkeit für jedes $n \in \mathbb{N}$ behauptet wird. Andererseits müssen derartige Behauptungen keinesfalls grundsätzlich durch vollständige Induktion bewiesen werden. Hiezu einige Beispiele:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $(n+1)^2 = n^2 + 2n+1$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$ und $q \in R$ gilt: $1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$

(5) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$

(6) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(7) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

(8) Für eine beliebig festgewählte natürliche Zahl p gilt:
$\frac{1}{p+1}\, n^{p+1} < 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p < \frac{1}{p+1}\,(n+1)^{p+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(9) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle n.

(10) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$: $(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(11) Für $p \neq 0$, $p > -1$ und $\forall n \geq 2$ gilt: $(1+p)^n > 1 + np$.
Bernoullische Ungleichung

(12) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: Eine Menge M mit n Elementen besitzt 2^n Teilmengen.

(13) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: jedes Polynom $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, besitzt eine komplexe Nullstelle (Fundamentalsatz der Algebra).

(14) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: jedes Polynom $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, besitzt höchstens n verschiedene Nullstellen.

(15) Sei M eine unendliche Menge, dann gibt es eine injektive Ausbildung $f: \mathbb{N} \to M$. (Ein Satz, dem man nicht unmittelbar ansieht, daß vollständige Induktion zum Beweis herangezogen werden kann.)

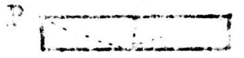
(16) Die Elemente einer Menge mit n Elementen gestatten n! verschiedene Anordnungen.

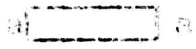
(17) Es gibt $\binom{n}{k}$ viele Möglichkeiten k Elemente aus n Elementen auszuwählen.

(18) Für alle $n \geq 2$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt[n]{a_1 . a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$
(Geometrisches Mittel ≤ arithmetisches Mittel. Man kann im MU wenigstens den Induktionsanfang und einen quasiallgemeinen Induktionsschluß durchführen ($2 \to 3$).)

(19) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\Sigma_{k=1}^{n} \sin^2 kx = \frac{n}{2}\; \frac{\cos(n+1)x + \sin nx}{2 \sin x}$.

(20) Ein geometrisches Beispiel: Wenn wir in einem Rechteck ("Papierband") a a' die beiden Seiten a und a' aneinander kleben, entsteht ein Zylindermantel, also eine Fläche mit 2 Seiten (Außen-, Innen-) und 2 Rändern (oberer, unterer Rand) "Aneinanderkleben" drückt sich mathematisch so aus: je 2 Punkte P, P' der Seiten a und a' werden laut Zeichnung identifiziert: P P'. Dreht man nun das Band vor dem Kleben 1 Mal herum, d.h. identifiziert man alle Punkte p und p' laut P p', so erhält man das berühmte <u>Möbiusband</u>, eine Fläche mit nur <u>einer Seite</u> und <u>einem Rand</u>. (Die Schüler sollen aus einem Papierstreifen ein Möbiusband herstellen und die Behauptung anschaulich verifizieren). Dreht man nun das

Band (bei a') 2 Mal vor dem Zusammenkleben, so entsteht wieder eine Fläche mit <u>2 Seiten</u> und <u>2 Rändern</u>: 

. Derartige 2-dimensionale Gebilde treten z.B. in der Alltagswerbung auf: etwa das Zeichen für "Wollsiegelqualität" (3 Mal gedreht), oder für "Renault" (2 Mal gedreht). - Man beweise durch vollständige Induktion den <u>Satz</u>: Hält man in einem (Rechteck-)Band 

die Seite a fest und verdreht man die Seite a' lt. Skizze <u>2n-Mal</u> ($n \geq 0$), und klebt dann die Seiten a und die (gedrehte) Seite a' aneinander, so erhält man eine Fläche mit <u>2 Seiten</u> und <u>2 Rändern</u>; dreht man vor dem Kleben <u>(2n-1)-Mal</u> ($n \geq 1$), so erhält man eine Fläche mit nur <u>1 Seite</u> und <u>1 Band</u>. (<u>Bem.</u>: Es sind 2 Induktionsschritte nötig: <u>$2n \to 2n+2$</u> und <u>$(2n-1) \to (2n+1)$</u>).

<u>§ 2. BEWEISBEISPIELE UND BEMERKUNGEN HIEZU</u>. Wir wollen das Prinzip der vollständigen Induktion etwa anhand der <u>Bernoullischen Ungleichung</u> (11) kurz wiederholen: Prinzipiell besteht ein Induktionsbeweis aus 2 Schritten:

(I) Die Behauptung wird für eine Anfangszahl $n = k$ explizit bewiesen (meist $k = 1$, hier aber offensichtlich $k = 2$). <u>"Induktionsanfang"</u>.

(II) Induktionsschritt ("Schluß von n auf n+1"; es wird angenommen, die Behauptung sei für $k = n$ bereits bewiesen und aus dieser <u>"Induktionsannahme"</u> wird die Richtigkeit der Behauptung für $k = n+1$ hergeleitet, hiefür braucht man eine von Fall zu Fall verschiedene Idee.)

Daraus folgt dann zunächst nur rein anschaulich intuitiv (siehe aber weiter unten), daß die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.
Bei (11) also:

(I): <u>$n = 2$</u>: $(1+p)^2 = 1 + 2p + p^2 > 1 + 2p$ da $p \neq 0$,

(II): <u>Schluß</u> <u>von</u> <u>n</u> <u>auf</u> <u>n+1</u>: Sei $(1+p)^n > 1 + np$ bereits bewiesen, dann gilt: $(1+p)^{n+1} > (1 + np)(1+p) = 1 + np + p + np^2 > 1 + (n+1)p$.

<u>Ad Beispiel (6)</u>: Man "entdeckt" die Formel z.B. durch Probieren für kleine n, vermutet die allgemeine Gültigkeit und beweist sie durch vollständige Induktion:

(I) <u>$n = 1$</u> ist klar; (II) <u>$n \to n+1$</u>: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 =$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$
und das ist die Behauptung für n+1!

<u>Bemerkung</u>: Bei diesem Beispiel - wie auch bei vielen anderen - ist deutlich zu sehen, daß vollständige Induktion "nur" dem Beweis einer

bereits vorhandenen Behauptung dient, welche also mit irgendwelchen anderen Mitteln gefunden wurde. Vom Standpunkt des forschenden Mathematikers und - didaktisch gesehen - wohl auch für den Studierenden bzw. Schüler ist aber die Idee, welche zur Behauptung führt - sei sie "nur" heuristisch, sei sie exakt durchführbar - oft bedeutsamer als der Beweis. Es ist daher für den MU nicht anzuraten, die Summenformeln für die arithmetische und geometrische Reihe nun - womöglich noch unter dem Anspruch eines "modernen Unterrichtes" - primär durch vollständige Induktion zu behandeln. Hier bringen die herkömmlich verwendeten direkten, konstruktiven Beweise wesentlich mehr: (d.h. bei (2) die Erkenntnis, daß gleich weit von der Mitte abstehende Summanden je gleiche Summe, nämlich $n+1$ haben, die Summe daher $\frac{n(n+1)}{2}$ ist. Analog bei (3): $q.[1+q+...+q^n]-[1+q+...+q^n]=q^{n+1}-1$, woraus sofort das Ergebnis folgt).

Noch deutlicher zeigt Beispiel (1), daß für den Beweis von Behauptungen, für deren Beweis sich vollständige Induktion prinzipiell eignen würde, ein solcher Beweis keinesfalls immer notwendig ist:

(1) folgt ja sofort für jedes $n\in\mathbb{N}$ wegen der Gültigkeit des Distributiv- und Assoziativgesetzes beim Rechnen mit natürlichen Zahlen. Ähnliches gilt für den Fundamentalsatz der Algebra (13), für den Gauß mehrere Beweise (unter anderem einen elementaren Induktionsbeweis) angegeben hat. Mit relativ tiefliegenden Sätzen der komplexen Funktionentheorie oder auch der Topologie des $\mathbb{R}^n$ läßt sich dieser Satz kürzer und eleganter beweisen. Wenn man aber im MU den Fundamentalsatz der Algebra erwähnt (wohl bei den komplexen Zahlen), so sollte man die Existenz eines - wenn auch langen - Beweises durch vollständige Induktion durchaus erwähnen. Der Schüler sollte sich zu diesem Zeitpunkt unter "Beweis durch vollständige Induktion" etwas vorstellen können. Dies ist sicherlich besser als nur darauf zu verweisen, daß es einen "Beweis gebe". Ohne nähere Hinweise können sich Schüler naturgemäß gar nichts darunter vorstellen.

Es ist für den Lehrer nach dem Gesagten nicht immer ganz leicht, Beispiele zu finden, an denen der Beweis durch vollständige Induktion in fachlicher und didaktischer Hinsicht wirklich sinnvoll zum Tragen kommt. Die "berühmtesten" Beispiele in der Mathematik - etwa (13), u.v.a. hier nicht genannte - sind meist zu schwer, andere wieder vielfach trivial oder "l'art pour l'art". Recht sinnvoll erscheinen mir etwa die Beispiele (6) und (7), die auch bei der Integralrechnung gebraucht werden, und Ungleichungen, die im MU ohnehin allzu stiefmütterlich behandelt werden. Die Bernoullische Ungleichung (11) z.B.

kann im MU ja auch bei der Bestimmung von $\lim(1+\frac{1}{n})^n = e$ Anwendung finden, um nämlich zu zeigen, daß die Folge $\langle(1+\frac{1}{n})^n\rangle$ monoton wachsend ist.

Ein schönes, die geometrische Anschauung schulendes Beispiel ist (20), das auch die Selbsttätigkeit des Schülers anregen kann. Die Idee des Induktionsschlusses ist in der Zeichnung angedeutet. (Formalisierung der Hintereinanderausführung des Drehens laut Zeichnung!)

Die Beispiele (4) und (5) wieder leiten sich so einfach aus (2) ab, daß man sie nicht durch vollständige Induktion beweisen muß. - Für den Beweis des binomischen Lehrsatzes (10) ist ein Beweis durch vollständige Induktion ein zwar "klassisches" Beispiel, doch mag - analog dem Gesagten - der "direkte" kombinatorische Beweis für das "Erlernen von Mathematik" besser geeignet sein:
$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b) = \Sigma\, a_k a^k b^{n-k}$, wobei der Koeffizient a_k des Produktes $a^k b^{n-k}$ so entsteht, daß k von den n Klammern das a "entsenden" und die anderen (n-k) Klammern das b, das aber läuft auf die Frage hinaus, aus den n Klammern jeweils genau k auszuwählen, die das a "ins Produkt $a^k b^{n-k}$ entsenden müssen", also $a_k = \binom{n}{k}$.
Schöne Induktionsbeweise für den MU sind wahrscheinlich auch (12) und (14), ein Resultat, das ja auch allgemein dringend benötigt wird!

Ad (12): Zunächst wird die Behauptung durch Probieren für kleine n erraten. Dann: (I) $n=1$: Sei $M=\{a\}$, dann gibt es genau 2 Teilmengen: $\emptyset$ und M selbst. Ferner: (II) $n \to n+1$: Sei $M=\{a_1\dots a_n, a_{n+1}\}$, dann hat $A=\{a_1\dots a_n\}$ nach Induktionsvoraussetzung 2^n Teilmengen. Jeder dieser Teilmengen kann man das Element a_{n+1} entweder hinzufügen oder nicht; es entstehen so also $2.2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen von M, und das sind freilich alle. Damit ist der Schluß von n auf n+1 vollzogen und die Behauptung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. (Auch hier gibt es einen anderen, "direkten" (kombinatorischen) Beweis, der auf den binomischen Lehrsatz für $(1+1)^n$ hinausläuft. Zum Unterschied zu vorhin scheint aber hier m.E. der Induktionsbeweis aus didaktischen Gründen vorzuziehen).

Ad (14): (I) $n=1$ ist klar; (II): Das Polynom $p(x)=x^n+x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ hat nach (13) mindestens eine Nullstelle x_o. Somit gilt
$p(x) = p(x) - p(x_o) = (x^n - x_o^n) + a_1(x^{n-1} - x_o^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x-x_o) + a/_n - a/_n =$
$= (x-x_o).(x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1})$ für passende Koeffizienten $b_1\dots b_{n-1}$, weil man ja $(x-x_o)$ herausheben kann: für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt bekanntlich: $(x-x_o)^k = (x-x_o)(x^{k-1} + x^{k-2}x_o + \dots + x_o^{k-1})$. Nach Induktionsvoraus-

setzung hat nun das Polynom $q(x) = x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ höchstens n-1 Nullstellen, somit hat p(x) außer x_o nur noch höchstens n-1 weitere, insgesamt also höchstens n; und damit ist der (Induktions-) Schluß - diesmal von n-1 auf n - vollzogen! - Ein für den MU nicht nur gut geeignetes, sondern auch wichtiges und sinnvolles - wenn auch natürlich wohlbekanntes - Beispiel!

Ad (15): Ein ebenfalls für den MU gut geeignetes Beispiel, zumal sich hier auch darstellen läßt, wie sehr der Beweis durch vollständige Induktion eigentlich nur das sozusagen "ganz normale" und intuitiv sich aufdrängende Denken formalisiert und exaktifiziert: Wir konstruieren die gesuchte Abbildung $f: \mathbb{N} \to M$, in dem wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Bild f(n) konstruktiv angeben:

(I) $M \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in M$. Sei $f(1) = x_1$. Nun ist M unendlich $\Rightarrow M \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$. $\Rightarrow \exists x_2 \in M \setminus \{x_1\}$, d.h. $x_2 \in M$ und $x_2 \neq x_1$. Sei $f(2) = x_2$ usw. - Was wir unter "usw" verstehen, wird in Schritt (II) exaktifiziert:

(II) Sei $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n)$ bereits gewählt, dann $\exists x_{n+1} \in M \setminus \{x_1 \ldots x_n\}$ weil M sicher nicht endlich ist, d.h. $x_{n+1} \neq x_i$ für $1 \leq i \leq n$. Sei also $f(n+1) = x_{n+1}$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit f(n) für alle $n \in \mathbb{N}$ festgelegt und die Abbildung ist außerdem nach Konstruktion injektiv; w.z.z.w.

Bemerkung: Hier liegt eigentlich weniger ein "Beweis", sondern eher eine "Konstruktion" durch vollständige Induktion vor, d.h. eine Folge $\langle a_n \rangle$ wird dadurch angegeben, daß a_1 angegeben wird und wie man a_{n+1} aus a_n bestimmen kann. Analog geht man ja oft bei Folgen und Reihen vor. Z.B.: "$a_1 = b$, $a_{n+1} = q \cdot a_n$ für $|q| < 1$" bestimmt bekanntlich eine (konvergente) geometrische Folge. Ein anderes bedeutsames Beispiel ist z.B. die Folge der Fibonacci-Zahlen, die u.a. in der Zahlen- und Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle spielen, und deren "geschlossene" Darstellung "$a_n = \ldots$", bekanntlich nicht gerade besonders schwer, aber doch auch nicht ganz einfach wäre: $a_o = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. (Im MU lasse man z.B. die ersten Folgenglieder bestimmen!)

Man spricht hier statt von "Definition" oder Konstruktion durch vollständige Induktion oft auch von "Regression" oder von "rekursiver Darstellung". Daß dabei die Folge wirklich für alle $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert ist, folgt im Grunde aus dem Prinzip der vollständigen Induktion (siehe auch weiter unten). Wegen der eher "schrittweisen"

Arbeitsweise eines Computers ist diese Folgendarstellung für Computerprogramme besonders wichtig. Es sollte ihr im MU besonderes Gewicht zukommen. - Vgl. auch Anhang VI.

Abschließend ein Beispiel, an dem wir den für den MU wichtigen Begriff des quasiallgemeinen Beweises besprechen wollen, der auch in der Einleitung schon mehrfach behandelt wurde:

Ad (16): Statt nach den möglichen Anordnungen der Elemente aus $M=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ zu fragen, kann man die Frage so formulieren: gegeben eine Bank mit n numerischen Sitzplätzen, auf die man die Elemente a_i setzen will. Für Vergabe des 1. Platzes stehen also (alle) n Elemente zur Verfügung, für den 2. Platz nur mehr n-1 Elemente, und so fort. Letztlich bleibt für den n-ten Platz nur noch ein (das letzte) Element. Insgesamt gibt es also $n(n-1)...1 = n!$ viele Anordnungen. - Das kann im MU, wenn man will, als "direkter" Beweis gelten. Didaktisch kann man aber vielleicht aus einem "quasiallgemeinen" Induktionsbeweis mehr herausholen: (I) $n = 1$ ist klar; (II): Statt nun von n auf n+1 zu schließen, führt man den Induktionsschluß z.B. für $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$ oder $4 \rightarrow 5$ durch: wenn wir für eine (vorgegebene) Anordnung von - sagen wir - 4 Elementen jetzt das fünfte "einreihen" müssen, haben wir genau 5 Möglichkeiten: ganz vorne, ganz hinten oder in einem der 3 Zwischenräume zwischen den 4 Elementen. Insgesamt gibt es also für jede Anordnung der 4 Elemente 5 neue Anordnungen aller 5 Elemente: für $n = 2$ also 1.2 viele, für $n = 3$ daher 1.2.3 viele, für $n = 4$ somit 1.2.3.4 viele, und wenn es für n Elemente P(n) viele Anordnungen gibt, so gibt es für n+1 Elemente daher $P(n).(n+1)$ viele. Ergebnis: $P(n) = n!$

Bemerkung 1: Dieser Beweis ist nicht nur sehr instruktiv, weil er zeigt, daß u.U. eine Vorgangsweise nach vollständiger Induktion auch auf die Idee führen kann, wie die aufzustellende Formel denn überhaupt aussehen könnte, sie demonstriert auch recht gut, wie und wann man - auch an "strengen" Regeln gemessen - im MU eben doch sagen darf: "Nun haben wir es für $n = 1,2,3,4$ bewiesen, und so geht es auch weiter". Hier wurde nämlich nicht die Behauptung einfach nur für einige Spezialfälle "verifiziert", hier wurde vielmehr der Schluß von 4 auf 5 "quasiallgemein" durchgeführt, d.h. ganz genauso wie auch der Schluß von n auf n+1 funktionieren würde, nur ohne Indizes und Buchstaben zu verwenden, für Schüler beides wesentlich vereinfacht. Das ist legitim und es ist genau die Art von (rudimentären) Induktionsbeweis, wie er auch schon bei Euklid (im 9. Buch der "Elemente", z.B.) und bei einigen guten Mathematikern des Mittelalters und später auftritt (vgl. z.B. auch die Bemerkung über Fermat und Wallis in der Einleitung). Bis zu Vieta (1540 - 1603), dem - grob gesagt - Erfinder der "Buchstabenrechnung" hatte man zwar schon mit Buchstaben formelmäßig gearbeitet, doch hatte man im wesentlichen immer nur gewisse Größen (auch neue "Zusammensetzungen") allgemein durch Buchstaben ersetzt, wirkliches - sozusagen algebraisches - Rechnen mit Buchstaben tritt systematisch erst ab Vieta auf (Vietasche Wurzelsätze!). Diese Bedeutung Vietas aus seiner Zeit sollte im MU durchaus herausgestrichen werden. Wirklich korrekte Schlüsse von n auf n+1 konnte man in den meisten Fällen natürlich erst nach der Erfindung der Buchstabenrechnung durchführen, im Grunde sogar erst nach Einführung der Indizes*). (G.V. Leibniz (1646 - 1716), G. Cramer (1704 - 1752). Vgl. (12) - (15)). All dies scheint mir im MU wenigstens andeutungsweise erwähnenswert, die Schüler sollen ja die Mathematik als etwas geschichtlich Gewordenes im Zusammenhang mit der Entwicklung aller anderen Wissenschaften und der Kultur überhaupt begreifen. Unser Thema ist hiezu sicherlich nur ein kleines, aber m.E. nicht zu unterschätzendes "Steinchen".

§ 3. AXIOMATISCHE HINTERGRÜNDE. In der "Allg. Encyklopädie der Wissenschaften und Künste" (Ersch und Gruber, 1840) heißt es unter dem Stichwort Induction: "Wegen der wesentlichen Verschiedenheit hat jedoch der Schluß von der Beschaffenheit einiger Arten auf alle übrigen (die sogenannte spezielle oder unvollständige Induction) geringere Zuverlässigkeit, wogegen die sogenannte vollständige Induction uns allerdings Gewißheit verschafft".

Worauf gründet sich denn eigentlich diese Behauptung? "Gewißheit", Woher und Wieso? Was veranlaßt uns, die Methode der vollständigen Induktion als Beweismethode gelten zu lassen? Natürlich könnte man antworten, dies sei doch intuitiv völlig selbstverständlich, und für den MU wird es sicherlich auch genügen, die Schüler bewußt "auf dieses Niveau" zu bringen. Dadurch ist viel geschehen. Es ist jedoch ein Grundsatz der Didaktik, daß die "Qualität" des Lehrers u.a. damit zusammenhängt, was er beim Unterricht wegläßt, kurz sein Hintergrundwissen, ohne das er diejenigen Dinge, die er im MU "bringt", nur schwer mit den richtigen Akzenten und Schwerpunkten versehen kann.

---

*) Verwendung von Buchstaben also nicht nur für algebraische Ausdrücke, sondern auch für Ordinalzahlen!

Wir wollen uns also im letzten Abschnitt dieser Frage widmen, eine Frage die in ihrer Art typisch für das 20. Jahrhundert ist, oder besser:deren Beantwortungsrahmen typisch ist für die "Nach-Hilbertsche" Mathematik, die sich stark mit axiomatischen Problemen und solchen Teilen der Mathematik beschäftigt, welche - zumindest in ihrer heutigen Form - aus der axiomatischen Denk- und Darstellungsweise hervorgegangen sind (z.B. Mengenlehre, Topologie, Funktionalanalysis, Wahrscheinlichkeitstheorie (im maßtheoretischen Sinn), moderne Algebra, und viele andere heute bedeutende Zweige der Mathematik bzw. heute übliche Darstellungen älterer Gebiete).

Die Beantwortung der Frage hängt auf das engste mit der Frage nach dem Wesen der natürlichen Zahlen zusammen, nach ihrer Definition und "Einführung". Daher also einige Bemerkungen zu diesem Themenkreis:

Die natürlichen Zahlen. Die Frage nach dem Wesen der natürlichen Zahlen läßt sich auf verschiedenen Exaktheitsniveaus beantworten, wir wollen also stufenweise vorgehen. - Für den MU reicht - abgesehen von gelegentlichen Bemerkungen in der Oberstufe - wahrscheinlich die erste Stufes aus. Hintergrundwissen dürfte sich aber vielleicht gerade auf diesem Gebiet auch mittelbar auf den Unterricht auswirken. Die Qualität des Vortrages wird ja nicht zuletzt von dem bestimmt, was der Vortragende bewußt wegläßt; eine unmittelbare Auswirkung betrifft natürlich auch die Akzent- und Schwerpunktsetzungen beim Lehrstoff.

1. Stufe: die "konkret-naive" Sichtweise *). Wir setzen: $| = 1$, $|| = 2$, $||| = 3, \ldots$. Diese aus dem täglichen Leben bekannten Zahlen werden als "natürliche Zahlen" bezeichnet: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. (Zu didaktisch-methodischen Fragen bei der Einführung der natürlichen Zahlen in der Primär- und Sekundärstufe I soll hier nicht Stellung bezogen werden, es gibt hiezu eine umfangreiche Literatur (siehe z.B. [KI]. U.a. hat F. Schweiger [SCH] dazu jüngst interessante Aspekte hinzugefügt). Aus weiter unten erläuterten Gründen wollen wir - wie es durchaus üblich ist - auch die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen rechnen, wir bezeichnen also die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$ mit $\mathbb{N}$ und sprechen von der Menge der natürlichen Zahlen. $\mathbb{N}$ ist, wie jeder Schüler weiß, in natürlicher Weise mit einer Ordnungs- und einer algebraischen Struktur ausgerüstet: $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$.

*) Dieser Terminus bedeutet keine Abwertung, er bedeutet vielmehr, daß die entsprechenden "mathematischen Objekte" auf dem Boden der konkreten Anschauung und in der Umgangssprache eingeführt ("definiert") werden. Vgl. weiter unten und z.B. die allgemeinen Bemerkungen hiezu in [RE].

Mit dieser "Definition" kann man bereits wichtige Eigenschaften der natürlichen Zahlen behandeln. Zum Beispiel

Satz: Jede nicht-leere Menge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element; "mathematisch" ausgedrückt: die total geordnete Menge $(\mathbb{N}, \leq)$ ist wohlgeordnet.-Nennen wir diese Eigenschaft von $\mathbb{N}$ für den Augenblick "(WO)".

Beweis (auf der "konkret-naiven Stufe eher eine "Plausibilitätserklärung". Vergleich hiezu auch die im folgenden gegebenen Beweise für diesen Satz. Die insgesamt 3 Beweise spiegeln unsere 3 Exaktheitsniveaus sehr gut wider): $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ mit $m \in A$. Die Behauptung läßt sich daher jeweils in endlich vielen Schritten beweisen: $0 \in A$? $1 \in A$? $2 \in A$?... . Wegen $m \in A$ ergibt sich die Behauptung konstruktiv nach höchstens m Schritten.

Aus dieser - wie es zunächst scheint: trivialen - Bemerkung läßt sich eine weitere Eigenschaft der natürlichen Zahlen ableiten, auf welche sich die Beweismethode der vollständigen Induktion unmittelbar stützt und begründet:

Satz: Sei $S \subset \mathbb{N}$ eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften (1): $0 \in S$, und (2): $(\{0,1,\ldots,n\} \subset S) \Rightarrow (n+1 \in S)$, dann ist $S = \mathbb{N}$.

Wir wollen diese Eigenschaft von $\mathbb{N}$ für den Augenblick mit "IND" bezeichnen.*)

Beweis: Indirekt: falls $S \neq \mathbb{N}$, so ist $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$. Wegen (WO) hat $\mathbb{N} \setminus S$ daher ein kleinstes Element m, und wegen $0 \in S$ gilt $m > 0$. Mit anderen Worten: $0 \notin \mathbb{N} \setminus S$, $1 \notin \mathbb{N} \setminus S, \ldots, (m-1) \notin \mathbb{N} \setminus S$, also $\{0,1,\ldots,m-1\} \subset S$, und wegen (2) folgt: $m \in S$, ein Widerspruch. Daher gilt $S = \mathbb{N}$.

Bemerkung: Interessanterweise läßt sich auch umgekehrt die Eigenschaft (WO) aus IND herleiten. Der Beweis ist (ohne dies für den MU zu empfehlen!) durchaus mit den Mitteln der 5. Klasse durchführbar und stellt eine gute Übung zur Mengenlehre und dem elementar-logischen Schließen dar:

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{N}$ und $A \neq \emptyset$, zu zeigen: A besitzt ein kleinstes Element.

1. Fall: $0 \in A$, dann ist 0 bereits das kleinste Element in A.

2. Fall: $0 \notin A$, also $0 \in \mathbb{N} \setminus A$. Nun gilt entweder für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Implikation: $(\{0,1,\ldots,m-1\} \subset \mathbb{N} \setminus A) \Rightarrow (m \in \mathbb{N} \setminus A)$, oder es gilt die Negation

*) Eine äquivalente, aber aus formalen Gründen bessere Formulierung von (2) lautet: $(\{k / k < m\} \subset S) \rightarrow (m \in S)$. Wir werden hier jedoch die obige Formulierung verwenden

dieser Implikation, also: Es gibt ein $m \in N$, so daß $(\{0,1,\ldots,m-1\} \subset N \setminus A)$ und dennoch $m \notin N \setminus A$.

Im ersten Falle gilt nach Voraussetzung, also der Eigenschaft (IND): $N \setminus A = N$, d.h. $A = \emptyset$, ein Widerspruch. Die zweite Aussage besagt aber $(m \notin N \setminus A) \Leftrightarrow (m \in A)$ und $0 \notin A$, $1 \notin A, \ldots, m-1 \notin A$, und das bedeutet, daß m das kleinste Element von A ist. - W.z.z.w.

Das Prinzip der vollständigen Induktion hängt somit eng mit der Wohlordnung der natürlichen Zahlen zusammen.

2. Stufe: (die axiomatische Sichtweise). Während auf der 1. Stufe eine inhaltlich-konkrete und mehr oder minder umgangssprachliche Beschriebung der natürlichen Zahlen zum Ausgangspunkt weiterer Überlegungen diente, erfolgt nun eine axiomatisch-formale Beschreibung.*)

Ziel dieser Sichtweise ist die Eliminierung von nicht oder nicht "exakt" begründeten anschaulichen oder sprachlichen Einflüssen und stillschweigenden Voraussetzungen; außerdem ein - womöglich nur - in der formalen Logik begründeter Aufbau der Theorie. Dieser Wunsch bzw. Anspruch und die damit verbundene Sichtweise der Mathematik tritt etwa seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts stark in den Vordergrund. Vgl. etwa M. Pasch (1843 - 1930), D. Hilbert (1862 - 1943): "Grundlagen der Geometrie", ferner die unten behandelten Peano-Axiome, die Kolmogoroff'sche (geb. 1903) Wahrscheinlichkeitsdefinition, die auf E. Borel (1898), H. Lebesue (1902), C. Jordan und G. Peano (1880) zurückgehende Maß- und (Flächen)-Inahltsdefinition, die axiomatische Definition der reellen Zahlen als vollständiger angeordneter Körper, u.a.m. - Es sei allerdings erwähnt, daß die sich daraus entwickelnde "moderne" Sichtweise der Mathematik nicht unwidersprochen ist (vgl. z.B. [WE] und Stichworte wie "Formalismus", "Konstruktivismus", "Intuitionismus", "Gödelscher Unvollständigkeitssatz", ua.m.). Tatsache aber ist, daß die axiomatische Sichtweise trotz aller - z.T. recht berechtigten - Einwände im wesentlichen bis heute dominant und sehr fruchtbar geblieben ist. Ihr Prinzip läßt sich anhand der natürlichen Zahlen recht gut andeuten: Ausgangspunkt einer axiomatisch gefaßten Theorie ist nicht eine inhaltlich-konkrete Beschreibung der Dinge,

*) Nach einem oft zitierten Ausspruch L. Kroneckers (1823 - 1891) sind die natürlichen Zahlen "vom lieben Gott gemacht" und daher einer näheren Analyse durch den menschlichen Geist entrückt. Nach Dedekind Frege, Russel, von Neumann u.a. sind die natürlichen Zahlen ein Teil der mathematischen Logik (siehe weiter unten).

über welche etwas ausgesagt werden soll, sondern eine Sammlung von sogenannten Axiomen, in welchen beschrieben wird, wie man mit den in ihnen enthaltenen Dingen <u>operieren</u> darf. Schon 1896 hat L.Coutourat in einem Aufsatz*) dies sehr treffend mit dem Schachspiel verglichen, wo die Figuren auch nicht inhaltlich-konkret definiert sind, z.B. "der Turm ist eine dicke Figur mit Zinnen", sondern durch ihre Eigenschaften, "der Turm ist eine Figur, welche waagrecht und senkrecht über beliebig viele Felder ziehen darf". - In diesem Sinn werden die natürlichen Zahlen "strukturell" durch die sogenannten <u>Peano-Axiome</u> [1858 - 1932] beschrieben (1899):

(1) 0 ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger n'.

(3) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(4) Keine natürliche Zahl ist Nachfolger verschiedener natürlicher Zahlen; d.h.: $(n' = m') \Rightarrow (n = m)$.

(5) Für jede Menge S natürlicher Zahlen mit (1) $0 \in S$ und (2) $(n \in S) \Rightarrow (n' \in S)$ gilt: S stimmt mit der Menge <u>aller</u> natürlichen Zahlen überein.

Deutlicher sollte man sagen: "Es gibt eine Menge N mit: (1) $0 \in N$, (2) jedes Element $n \in N$ hat einen "Nachfolger" $n' \in N$, (3), (4) wie oben und (5): $\forall S \subset N$ mit $(0 \in S) \wedge (n \in S) \Rightarrow (n' \in S)$ gilt: $S = N$.

Ferner bezeichnet man: $0' = 1$, $1' = 2$, usw. Die Elemente von N heißen: "natürliche Zahlen". Wir sehen, daß dieses Axiomensystem die nicht näher festgelegten Begriffe "0" und "Nachfolger" und eine nicht weiter als durch (1)-(5) spezifizierte Menge N als undefinierte Grundbegriffe enthält. Alle weiteren Aussagen über natürliche Zahlen dürfen nur aus diesen "Axiomen" hergeleitet werden. Die Axiome sind an sich - wie z.B. die Spielregeln eines Spieles - willkürlich und dürfen bloß keine Widersprüche enthalten. Ob eine so entstehende Theorie dann für "Alltagsprobleme" auch brauchbar ist, hängt von der geschickten Wahl der Axiome ab, ob sie nämlich die zu beschreibende Situation, welche vorerst ja nur durch intuitive Aussagen und in der Alltagssprache umschrieben ist, gut <u>widerspiegeln</u>. Wir sehen z.B., daß Peano die anschaulich so einleuchtende Eigenschaft (IND) <u>als Axiom</u> - das sogenannte <u>Induktionsaxiom</u> - verwendet hat und nicht etwa die Aussage (WO). Diese kann dann aber wie in § 2 daraus hergeleitet werden. Ferner erkennen wir, daß die Sprache und "Gesetze" der Mengenlehre als vorausgesetzt gelten!

---

*) "L'infini mathematique" (aus E.T. Bell: men of Mathematics, New York 1937.

Zu dieser formal-strukturellen Einführung der natürlichen Zahlen drängen sich natürlich sofort 2 grundsätzliche Fragen auf:

(I) Kann es verschiedene Interpretationen (Modelle) der Peano-Axiome geben?

(II) Gibt es überhaupt eine Interpretation (ein Modell)? Sind die Axiome widerspruchsfrei?

Ad (I): Die Antwort lautet: nein. Man kann beweisen, daß je zwei Interpretationen (Modelle) der Peano-Axiome isomorph sind, d.h. sich bestenfalls durch die Bezeichnungsweise, nicht aber in ihrer Struktur unterscheiden. - Dies liegt im wesentlichen an der Formulierung des Induktionsaxiomes, in welchem über alle Teilmengen S der Menge N quantifiziert wird, das Axiom ist in einer Sprache "höherer Ordnung" abgefaßt. T. Skolem (1887 - 1963) hat bewiesen, daß man - will man nur die Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe verwenden - die natürlichen Zahlen nicht durch abzählbar viele Axiome beschreiben kann. (T. Skolem: "Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich ober abzählbar unendlich vielen Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen", Fund.Math. 23 (1934), 150-161). Er konstruiert in dieser Arbeit zu jedem Modell der vorgegebenen Axiome ein echt umfassendes, welches die gleichen Axiome erfüllt. - Auf dem "üblichen" Boden der Mengenlehre sind die Peano-Axiome aber "kategorisch", d.h. sie legen die natürlichen Zahlen eindeutig fest.) - Es ist also keineswegs nur von formaler (oder gar ästhetischer) Bedeutung, daß hier die Sprache der Mengenlehre verwendet wird:

Ad (II): Die Beantwortung dieser Frage führt uns zu unserer 3. Stufe der Beschreibung der natürlichen Zahlen: Hier versucht man - wie beim Schachspiel - ein "konkretes" Modell der Axiome zu basteln, d.h. man zeigt eine Möglichkeit, die Grundbegriffe durch "konkrete Dinge" zu interpretieren, und zeigt anschließend, daß das so gewonnene System wirklich die Axiome erfüllt. Beim Schachspiel wäre dies etwa das Schnitzen ganz bestimmter Holzfiguren: Türme, Damen usw., welche dann die Spielregeln (Axiome) ausführen. Bei den Peano-Axiomen bietet sich als "konkretes Reich", innerhalb dessen die Interpretation erfolgen soll, z.B. die Mengenlehre an, deren Begriffe und Regeln ja als vorausgesetzt gedacht sind.

J. von Neumann (1903 - 1957) hat folgende Möglichkeit vorgeschlagen: Den Grundbegriff "Null" ("0") interpretiere man durch die leere Menge Ø, und als "Nachfolger" einer (beliebigen) Menge M lasse man die Menge M∪{M} gelten. Das heißt: Die Menge 0' = Ø ∪ {Ø} = {Ø} ist eine (im Reich der Mengenlehre "konkrete") Interpretation der Eins, also steht "1" für {Ø}; 2 = 1' muß dann für {Ø} ∪ {{Ø}} = {Ø,{Ø}} = {0,1} stehen, "3" ist als Nachfolger von 2 die Menge {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}} = {0,1,2} usw.; allgemein: n = {0,1,...,n-1}. Die natürlichen Zahlen werden also - grob gesagt - schrittweise aus der (leeren) Menge Ø aufgebaut, deren Existenz ihrerseits durch ein Axiom der Mengenlehre gesichert ist. Setzt man also die Mengenlehre voraus, so ist {Ø,{Ø},{Ø}},....} eine Interpretation, d.h. Konkretisierung der in den Peano-Axiomen als existent geforderten Menge N. Die "natürlichen Zahlen" sind somit als ganz bestimmte Mengen definiert. Man muß dann natürlich auch die Rechenoperationen + und . allein durch Begriffe der Mengenlhere einführen und ebenso die Ordnung ≤. Letztere kann - wie man leicht erkennt - so geschehen: (n < m) ⇔ (n ∈ m). Z.B. ist 1 < 3, weil {Ø} ∈ {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}}. (Dabei ist zu beachten, daß die Enthaltenseinsrelation "∈" als Grundbegriff der Mengenlehre als vorausgesetzt gilt. Daß durch obige Definition tatsächlich eine Ordnungsrelation festgelegt wird, muß bewiesen werden" dies folgt aber im wesentlichen aus den Eigenschaften von "∈" (vgl.[KI]). Daß die so konstruierte Menge N wohlgeordnet ist - und damit das Induktionsaxiom (IND) erfüllt, muß nun allein auf dem Boden der Mengenlehre bewiesen werden. Und auf dieser Exaktheitsstufe folgt (WO) aus einem Axiom der Mengenlehre, dem sogenannten "Fundierungsaxiom". M.a.W.: (IND) folgt letzlich aus einem mengentheoreitschen Axiom (siehe Anhang IV).

Zusammenfassend: Auf unserer 3. Stufe erscheinen die natürlichen Zahlen wieder konkret eingeführt, diesmal allerdings nicht konkret-umgangssprachlich, sondern "konkret" in dem Sinn, daß die natürlichen Zahlen als ganz bestimmte Objekte der Mengenlehre auftreten bzw. definiert sind. Die Eigenschaften der natürlichen Zahlen (z.B. die in den Peano-Axiomen festgehaltenen) erscheinen nun als Sätze, welche mit den Begriffen und Mitteln der Mengenlehre formuliert und bewiesen werden. Insbesondere läßt sich die Eigenschaft (IND), auf welche sich - wie gesagt - die Methode der vollständigen Induktion gründet, im Rahmen dieser Festlegung der natürlichen Zahlen beweisen, d.h. zurückführen auf Gesetze der Mengenlehre.

Man kann nun selbstverständlich die Sache weiter treiben und fragen, was denn nun "Mengen" sind, besser: wie nun die Begriffe und Gesetze der Mengenlehre definiert sind. Dabei kann man sich bekanntlich nicht ohne weiteres auf G. Cantors (1845 - 1918) "Definition" stützen, der zufolge eine Menge eine "Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen" ist. Diese offensichtlich ebenfalls "konkret-inhaltliche" Beschreibung des Mengenbegriffes führt bekanntlich zu Widersprüchen, wie z.B. der "Menge" $\mathfrak{m}$ von allen Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, so daß also $(\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}) \Leftrightarrow (\mathfrak{m} \notin \mathfrak{m})$. Diese "Russelsche Antinomie" tritt nicht auf, wenn man auch den Mengenbegriff axiomatisch einführt, beispielsweise durch das Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel (ZF) oder jenes von Gödel-Bernays-Neumann (GBN). In diesem Rahmen wird der Mengenbegriff ähnlich formal-strukturell (durch seine Eigenschaften also) eingeführt wie oben die natürlichen Zahlen eingeführt werden.

In diesem Sinn läßt sich dann die Eigenschaft (IND) der natürlichen Zahlen - und damit das Beweisprinzip der vollständigen Induktion - auf ein (bzw. mehrere) Axiom(e) der Mengenlehre zurückgeführt werden. (Im Rahmen von (GBN) ist dies im wesentlichen das "Fundierungsaxiom": "Für jede Menge A existiert ein $a \in A$, so daß $a \cap A = \emptyset$". - Dieses Axiom "killt" nicht nur die Russelsche Autonomie, es folgt daraus auch, daß die von Neumannsche Konstruktion der natürlichen Zahlen eine wohlgeordnete Menge liefert. Und daraus folgt (siehe § 2) das Induktionsprinzip, genauer: die Eigenschaft (IND).)(Siehe Anhang IV)

Die Axiome der Mengenlehre ihrerseits werden als widerspruchsfrei angesehen und bilden in dieser Sichtweise die Grundlage der (eben auf der Mengenlehre aufbauenden) "übrigen" mathematischen Begriffswelt. Ursprünglich dachte man, die Mengenlehre ihrerseits auf eine Art "absolut geltende" Logik zurückführen zu können, ein Unternehmen, das nicht geglückt ist und - nach Untersuchungen und Ansicht vieler Logiker - nicht glücken kann. (Es sei jedoch nochmals darauf hingewiesen, daß es auch grundsätzlich andere Zugänge zu den sogenannten "Grundlagen der Mathematik" gibt; siehe z.B. [ST] u.a.). Auch gibt die in der Schulmathematik oft noch gängige Trivialinterpretation dieser Bemerkung - die ganze Mathematik sei nichts anderes als die Lehre von den Strukturen eines auf der Mengenlehre aufbauenden "Gebäudes" - ein viel zu enges Bild der Mathematik!

Zum Abschluß wollen wir wieder in den Schulalltag zurückfinden und mit einem bekannten, aber netten Beispiel schließen (welches insbesondere auch auf die Wichtigkeit des korrekt gewählten Induktionsanfanges aufmerksam macht).

Beh.: (A_n): Fall das Maximum zweier natürlicher Zahlen $k,l \neq 0$ gleich n ist, sind die beiden Zahlen gleich; also: für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und für $k,l \in \mathbb{N}$ und $k,l > 0$ gilt: $(\max(k,l) = n) \Rightarrow (k = l)$.

Beweis durch vollständige Induktion:

(1) Für $n = 1$: Aus $\max(k,l) = 1$ folgt wegen $k,l > 0$: $k = 1$ und $l = 1 \Rightarrow k = l$

w.z.z.w.

(2) Angenommen, die Behauptung stimmt für $n = N$; z.z. sie stimmt auch für $N+1$ (Schluß von N auf $N+1$):
Sei $\max(k,l) = N+1 \Rightarrow \max(k-1,l-1) = N$; $\Rightarrow$ (nach Induktionsvoraussetzung): $k-1 = l-1$, also: $k = l$, w.z.z.w.

Die Aussage (A_n) stimmt daher für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gilt in weiterer Folge für alle $n \in \mathbb{N}$: $n = 1$. Wegen $\max(n,1) = n$ gilt weiter: $n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und das bedeutet - durch vollständige Induktion bewiesen -, daß es die natürlichen Zahlen gar nicht gibt. Oder?

Schlußbemerkung:

Wegen der den Autoren auferlegten Beschränkung der Seitenzahl mußte ich alle Anhänge weglassen. Diese Anhänge betreffen:

(1) Den genauen Wortlaut der ersten Formulierung des Induktionsprinzipes durch B. Pascal (1665) und den genauen Wortlaut eines Zitates von Simplikios (ca. 520), in welchem er - wenn man es so sehen will - eine sehr interessante, wenn auch vage und verschwommene Andeutung dieses quasi "archetypischen" Denkprinzipes gibt.

(2) Eine Anwendung der Bernoullischen Ungleichung beim Beweis, daß $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ existiert (6./7. Klasse).

(3) Eine Bemerkung zur Methode der transfiniten Induktion.

(4) Nähere Erläuterungen zur von Neumannschen Konstruktion der natürlichen Zahlen (d.h.: Konstruktion eines Modelles der Peano-Axiome im "Reich der Mengenlehre") sowie den Beweis, daß dieses Modell das Induktionsaxiom erfüllt und eine nähere Erläuterung des hiebei verwendeten "Fundierungsaxiomes" der Mengenlehre.

(5) Beweis des Eulerschen Polyedersatzes durch Induktion und des Satzes von Euler über Landkarten auf der Kugel.

(6) Beispiele und Bemerkungen über die Bedeutung der "Definition durch vollständige Induktion" in der Mathematik (u.a. induktive Definitionen für den Dimensionsbegriff).

(7) "Vollständige Induktion" und "Intervollschachtelung" sowie ein Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes (für die Dimensionen 1-3) durch vollständige Induktion; ein mögliches Thema im MU.

Abschließend noch eine Art Scherzaufgabe zum Thema "vollständige Induktion":

In allen Lehr- und Lernzieltaxonomien für den Mathematikunterricht tritt unter anderem die Fähigkeit auf, Grenzen der Anwendbarkeit mathematischer Modelle und Denkweisen erkennen zu können. Die Aufzählung der mit unserem Thema erreichbaren Lehrziele in der Einleitung dieser Arbeit ist natürlich keinesfalls vollständig und könnte zum Beispiel auch in dieser eben angesprochenen Hinsicht durch eine Art "Scherzaufgabe" bereichert werden, für die ich einem Hörer eines an der Universität Innsbruck gehaltenen Vortrages zu danken habe:

Frage: Wieviel Blatt Papier kann ein Mann mittleren Alters tragen?

Antwort: Eine unendliche Anzahl von Blättern.

Beweis durch vollständige Induktion: (1) Er kann sicherlich ein Blatt tragen; (2) wenn er n Blatt Papier tragen kann, kann er sicherlich auch n+1 Blätter tragen. W.z.z.w.

Literatur:

[CA] F. Cajori: Origin of the name "Mathematical Induction"; Amer.Math.Monthly 25 (1948), 197-201.

[FR] H. Freudenthal: Zur Geschichte der vollständigen Induktion; Arch.Int.d'Hist. Sci. 22 (1953), 17-37.

[RE] H.-C. Reichel: Vektorbegriff und axiomatische Fragen, im Rahmen der linearen Algebra an der gymnasialen Oberstufe; in "Beiträge zum Mathematikunterricht", Schroedel, Hannover, 1978.

[SCH] F. Schweiger: Vom unauffällig Unendlichen zum auffällig Unendlichen: Vortrag beim 2. Österr.Math.Treffen, Leoben 1979; ersch. vorauss. in der Didaktik-Reihe der ÖMG.

[ST] W. Stegmüller: Hauptströmungen der Gegenwarts-Philosophie, Stuttgart 1969.

[VDW] B.L. van der Waerden: Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik; Math.Ann. 117 (1940), 141-161.

[WE] H. Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft; München-Berlin, 1937.

[KI] A. Kirsch: Elementare Zahlen- und Größenbereiche: eine didaktisch orientierte Begründung der Zahlen und ihrer Anwendbarkeit; Göttingen, 1970.

Prof.Mag.Dr. Hans-Christian Reichel

Institut für Mathematik

der Universität Wien

Strudlhofgasse 4

A-1090 Wien